Problema 3

Dacă z_1, z_2, z_3 sunt numere complexe de modul 1 cu $|-z_1+z_2+z_3|=\sqrt{2}$, $|z_1-z_2+z_3|=\sqrt{3}$ și $|z_1+z_2-z_3|=\sqrt{6}$ arătați că $|z_1+z_2+z_3|=1$.

Supliment GM 4/2015, Aurel Doboșan, Lugoj

Soluție

Avem $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ deci $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}=z_3\cdot\overline{z_3}=1$

$\Rightarrow \overline{z_1}=\frac{1}{z_1}, \overline{z_2}=\frac{1}{z_2}, \overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$ — 1 punct

$|-z_1+z_2+z_3|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (-z_1+z_2+z_3)(-\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=2$ — 1 punct

$\Leftrightarrow (-z_1+z_2+z_3)\left(-\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=2 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}-\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+3=2$ — 1 punct

analogele:

$$\left.\begin{aligned}\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}-\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+3=3\\ \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}-\left(\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+3=6\end{aligned}\right\}$$ 1 punct

prin adunare: $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=-2$ — 1 punct

Apoi $|z_1+z_2+z_3|^2=(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=$

$(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=3+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_2}$

$=3+(-2)=1$ — 1 punct

Concluzie $|z_1+z_2+z_3|=1$ — 1 punct